在本章和下一章中,我们将介绍水模拟的特殊情况,这些特殊情况允许更快,更简单的算法.在这两种情况下,我们将使用简化的假设,即水表面可以表示为**高度场**:水区域是的所有点,不包括固体.最重要的固体当然是水底,我们也将其表示为高度场,定义为

因此水深为.实际上,我们将深度作为主要的模拟变量,根据需要重建高度.这种几何上的简化排除了许多有趣的效果，例如令人信服的飞溅，破裂的波浪，液滴或喷雾，但仍然允许许多有趣的波浪运动.在本书中，我们还将底部固定为常数——尽管遵循本章中的建模步骤，允许其移动是一个相当容易的一般化.

假设高度场在整个模拟过程中保持与水的良好近似，我们还需要将注意力集中在不太陡峭的高度场和不太极端的速度上:我们主要研究相对平静的波浪.例如，一排高大的水柱可以在第一帧中用高度场表示,但是当它开始塌陷时，它几乎必然会以更一般的方式开始飞溅，从而将其排除在外.

当然，虽然您可以使用高度场表示法结合书中前面详细介绍的完整三维求解器来跟踪水面(请参阅Foster和Metaxas [FM96]),但我们将做一些进一步的近似来降低公式复杂性.在本章中,我们将研究浅水较情况，即与波浪或其他流动特征的水平长度尺度相比，深度非常小,而在下一章中，我们将考虑深水情况.

**12.1 导出浅水方程**

**12.1.1 假设条件**

浅度假设实质上意味着我们可以忽略速度场中的垂直变化:流体没有垂直“空间”(如涡流彼此叠加).然后,我们将跟踪平均深度的水平速度和,它们是和对沿水深变化的平均值.对于本章中要建模的无粘性流,您可以认为和沿是常数.对于粘性流,更好的模型是和从底部的零线性变化到自由表面的最大速度线性变化.

深度平均的过程由更多广泛应用.例如,对雪崩进行建模（与雪层所流经的山坡相比，雪层薄）以及大规模的天气模式(与地球周长相比,大气层和海洋非常薄).所得到的方程组仍然被称为“浅水方程”,即使是指除水以外的流体.

我们将进行的另一个基本简化是假设静水压力.动量方程的垂直分量为

（其中是由于重力引起的加速度的大小）,我们将假定主要项是压强梯度和重力,其余忽略.这与浅水相对平静且流体中的加速度远小于的要求是一致的.删除小项即可得出静水压强方程:

将其与处的自由表面边界条件结合可得出

再次重申,如果水在流淌,这并非完全正确,但这是一个很好的近似值.我们可以直接记下浅水情况下的压强,而不是像在三维流中那样必须解决大型线性压强系统这一事实,这是关键的提速措施之一.

**12.1.2 速度**

假设和沿恒定,则,这意味着动量方程的水平部分被简化为

这只是二维对流以及压强梯度的水平部分.请注意,尽管压力在中呈线性变化,但其梯度的水平分量实际上在中是恒定的.代入公式得到

也就是说,水平速度分量像往常一样在平面中对流,额外的加速度与重力成比例，从而将水从较高的区域拉到较低的区域.

垂直速度呢?事实证明,这完全是由我们将要模拟的“主要”浅水变量(和)确定的.在仿真中,我们实际上并不需要,除非出于某种原因需要计算它,例如流中的粒子对流，但是它会很方便地找出表面高度在瞬间的变化情况.

首先看一下不可压缩条件:

该方程式的右侧不取决于,因此在方向上也必须是常数-这意味着必须是的线性函数.它完全由底部的值和我们刚刚得出的梯度来确定.

底部速度来自边界条件,再次记住我们假设底部是固定的.回顾一些基本演算,底部的法线与成正比，因此在底部:

请注意,如果底部是平坦的,则的偏导数为零,这将按预期减少为.结合公式,我们可以在流体的任意点获得以下垂直速度:

换句话说,对于浅水,给定水平速度,我们将设为使流体不可压缩并满足底部固体边界条件所需的值.

**12.1.3 高度**

我们还可以用另一种方式描述自由表面的垂直速度.请注意,函数隐含地将自由表面定义为其零等值线——类似于我们在第8章中跟踪一般液体表面的方式.我们知道自由表面,即零等值线,随流体的速度移动,因此至少在曲面本身满足对流方程

代入我们在公式导出的速度,可以得到高度变化率的公式,此时,

使用深度,并是常量,以将其简化为

即，水深由水平速度对流,并且此外与深度和二维散度成比例地增加或减少.

我们可以进一步简化公式,将其放入所谓的守恒定律形式:

实际上,这可以直接从质量守恒推导而来.类似于附录B中的方法.在此意义重大,因为它精确地产生了系统中总水量守恒的数值方法,从而避免了我们之前看到的三维自由表面流质量损失的问题.但是,对此进行足够准确的离散化(以避免数值耗散)超出本书范围的主题.

**12.1.4 边界条件**

方程和或也需要边界条件，水在(x-z水平面内)终止或模拟域终止. 实心墙的情况最简单:如果是x–z平面中墙的二维法线,则我们要求

当然,对于移动的实心墙,应改为.为了沿法线方向保持该速度,遵循速度方程,我们还需要

这也适用于流入/流出边界,在边界处我们将水抽入或抽出模拟.可以通过在高度方程中添加源项,在某些区域直接添加(或减去)水来增强这种边界的实用性.这样的源术语也非常适合于建模垂直的水槽或水源(例如,从上方下落的水滴,可能是在粒子系统或排水孔中).

如果假设水继续流过边缘，则处理模拟域的边缘会更加困难。如果您希望系统中的所有波都平行于边缘传播，那么在此处放置不可见的实心墙边界是完全合理的。如果确定波浪应该沿一条边进入，也许是从简单的正弦波模型进入的（有关如何选择此类波浪，请参见下一节），则可以进一步指定法向速度和高度。但是，如果您还希望波浪从边缘离开，那么事情将变得非常棘手：即使看不见或指定特殊的法向速度和高度，坚固的墙壁也会反射入射的波浪。确定非反射（或吸收）边界条件并不简单，并且仍是数值方法研究的主题。通常采用的方法是，在许多网格单元的过程中，逐渐将模拟的速度和高度与背景场（例如基本正弦波或静止的平水）混合在一起：如果混合足够平滑且渐变，反射应该最小。

最后，对于许多浅水模拟而言，最重要的一个边界条件是在移动接触线上：水深降至零的位置，例如水在海滩上终止的位置。 实际上，在这种情况下不需要应用边界条件：如果需要数值方法，则可以像往常一样将速度外推到旱地，并且深度为零（h = b）。

**12.2 波动方程**

在进入数值方法来求解浅水方程之前,快速看一下更进一步的简化方法.对于非常平静的水,我们可以完全忽略对流条件,

两边同时除以并取时间的微分:

然后代入简化的速度方程得到

扩展左侧,但进一步忽略二次项,因为它要小得多,得到

其中拉普拉斯在这里仅作用在二维空间(x和z).最后,假设右侧的深保持足够接近恒定,这被称为**波动方程[wave equation]**.

波动方程还会在许多其他现象中出现，例如固体材料中的弹性波，电磁波，声学（声波）等等,并且已经进行了充分的研究.傅里叶分析可以提供完整的解决方案,但是为了简单起见,我们只需要尝试一个正弦波.取一个单位长度的矢量(在二维中),该矢量代表波的运动方向;波浪的波峰和波谷将位于垂直于的直线上.设为波长,为振幅,为波速.将所有这些放在一起可以得到

如果将其作为代入到波动方程,我们得到下列方程:

这简化为

换句话说,波动方程具有对应于以速度移动的波动的解.Yuksel等人[YHK07]根据这种观察结果,直接使用非常快的波解算器,使用以这种速度传播的“波粒”来局部改变水的高度.

从所有这些简化和模型中收集的关键见解是,浅水波以与深度相关的速度运动:水越深,波运动越快.例如,当波浪接近海岸时,深度减小,波浪减速.特别是,海浪的前锋较慢地减速,因此来自海浪后部的水开始堆积.海岸附近的海浪自然会变得越来越大和陡峭,如果条件合适,波峰最终将合并.我们在本章中开发的浅水方程确实包含了此功能,尽管高度场假设在波浪破碎时不成立:我们无法完全捕捉到该外观,但我们将能够近似.

**12.3 离散**

离散浅水方程的方法有很多,每种方程都有其优点和缺点.您可能尤其要看一下Kass和Miller对动画[KM90]的方程的介绍，以及Layton和van de Panne的无条件稳定方法[LvdP02].在此,我们将对Layton和van de Panne方法进行一些细微的改动,从而避免线性求解器限制时间步长的需求.

我们像往常一样从二维交错MAC网格开始,在适当的边缘中点存储速度分量和,在单元中心存储深度.在需要的地方,根据深度将高度重建为.在初始阶段,我们还使用通常的时间分割方法来处理对流,也许到目前为止我们一直在使用半拉格朗日方法:

然后我们计算中间高度场并将其外推到非流体单元,即将设置为最近的流体单元中的值.请注意,重要的是外推高度而不是深度,因为我们要确保静置在倾斜海滩上的水将保持静止.然后,我们用压强加速度更新速度:

我们像往常一样将这些速度外推到非流体单元中,最后用散度项更新深度:

这就是全部!

但是,这里存在稳定时间步长限制.可以用与第12.2节中得出的近似值相同的脉络进行简单分析,以得出波动方程,表明对于稳定性,我们需要

其中是最大深度值.建议使用0.2.